

# 結び目と絡み目の正則表示に関する規則的な描画法

長島 隆廣

結び目と絡み目は数学の一分野である結び目理論の正式な数学用語です。本論文では、結び目 [8] を 1 本の糸が閉じたものと考えておきます。糸で出来たアヤトリ用の輪でもよく、1 本の糸が複雑に絡み合っている糸玉でも結び目です。一方、絡み目 [1] は 2 本以上の糸が絡み合っているものです。ただし、絡み目の糸はすべて閉じており、糸の端はありません。絡み目は複数の結び目を一組として考えた対象です。結び目理論 [2, 5, 6, 7, 11] では、これらの糸が太さをもたず、3 次元空間上に浮いている状態の閉じた曲線として考えます。

以下では結び目も含めて絡み目と呼びます。従って、絡み目とは、結び目または絡み目のことです。絡み目でない場合は、結び目であることを明示します。

空間に浮いている絡み目を或る任意の平面上に投影して、平面図形として表現した図形を正則表示 [11] と呼びます。正則表示は平面上の曲線の集まりです。この正則表示は、空間上の絡み目の各点と平面上の曲線の各点が交差点 [11] を除いて、1 対 1 に対応しています。交差点は、空間上の絡み目の異なる 2 点が平面上で 1 点に重なる点です。交差点を平面上に描くとき、曲線の交差角度を高々 90 度になる様にします。また、平面上で交差する部分について、空間上での絡み目の曲線のうち、下にある曲線を平面上では、一部分を切り欠いて上下の違いを判別できるように描画します。ここで、正則表示の例として結び目の正則表示を図 1 に示します。

図 1 の正則表示は、樹下・寺阪結び目 [9] と呼ばれる有名な結び目です。図 1 を見ると、線が交差する位置で、ところどころ切られています。この切り欠きのある方を下交差点、切り欠きがなく連続して描かれている方を上交差点と呼びます。

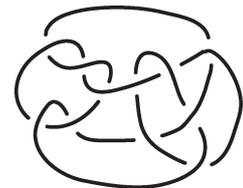


図 1: 樹下・寺阪結び目

一般に、絡み目の正則表示は、図 1 に示した様に、切り欠きのある不規則な曲線で描かれます。絡み目の正則表示が何の制約もない自由な曲線で描かれるために、かえって、描くのが困難になっています。3 つの交差点しか持たない三葉結び目でさえ描くのに戸惑います。ましてや、4 交差点、5 交差点と交差点の数が増加してゆき、9 交差点、10 交差点ともなれば、もう描画はお手上げです。

ところがここに、絡み目の正則表示を描くのに、一つの良い方法があります。この方法ならば、交差点の数が 20 でも 30 でも、ある規則に従えば誰でも楽に描けます。以下では、絡み目の正則表示が簡単に描ける方法を述べます。まず、この描画方法の結論を先に示しましょう。

描画方法 A. 3-正則平面グラフの各辺へ，1つまたは複数個の交差点を適切に対応させる．かつ同時に，各頂点へは‘自明な3次タングル’を対応させる．

上述で‘適切に対応させる’とは，交差点を対応させる辺と，対応させない辺があるという意味です．また，‘自明な3次タングル’とは，3本の糸を1組にしたような対象です．この‘自明な3次タングル’は，あとで，平面図形として図示します．‘描画方法 A’による方法で得られた正則表示を2重性並行表示と呼ぶことにします．

すべての結び目および絡み目の正則表示が，‘描画方法 A’の方法により構成できますので，これを定理として記述しておきます．

絡み目表示定理. ‘描画方法 A’の方法を用いて，すべての結び目および絡み目の正則表示は，2重性並行表示で表現できる．<sup>T)</sup>

以下では，‘描画方法 A’について述べます．まず，任意に与えられた絡み目の正則表示を2重性並行表示に変形する方法を示します．この変形方法は，任意の絡み目に適用できますが，具体的な変形の手順を示すために，図1の樹下・寺阪結び目を例にとります．

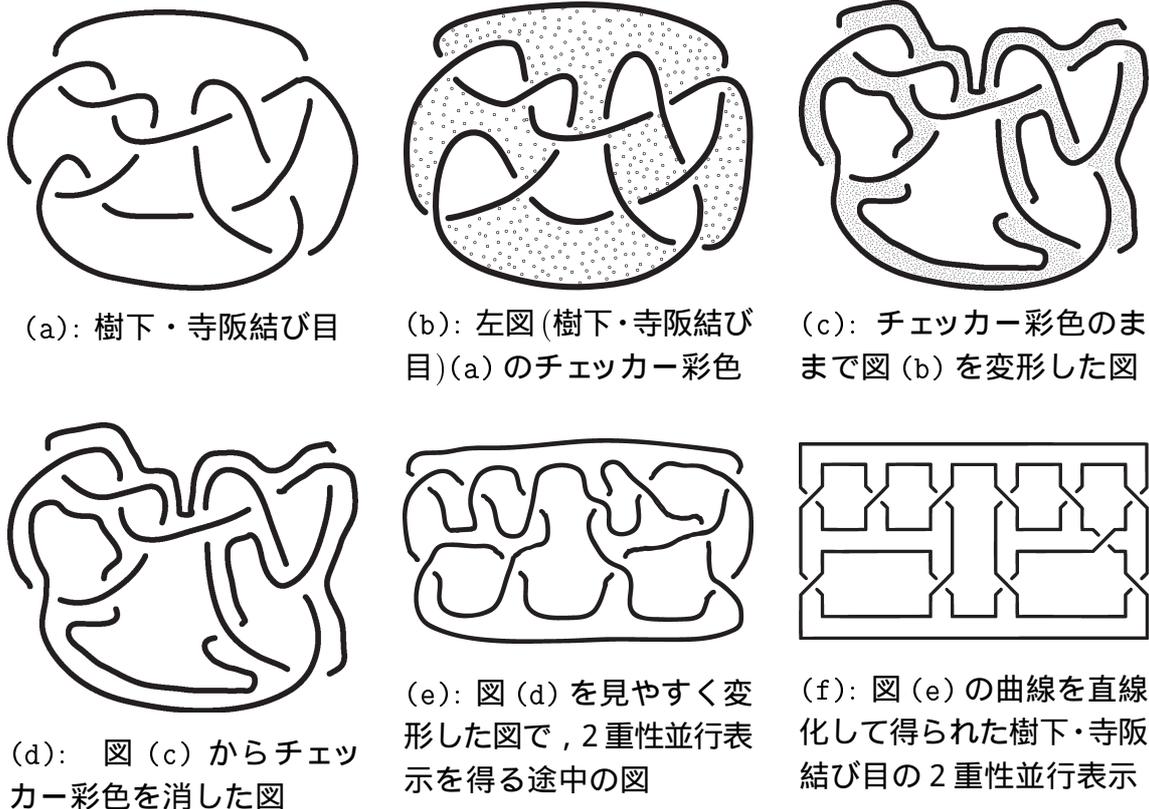
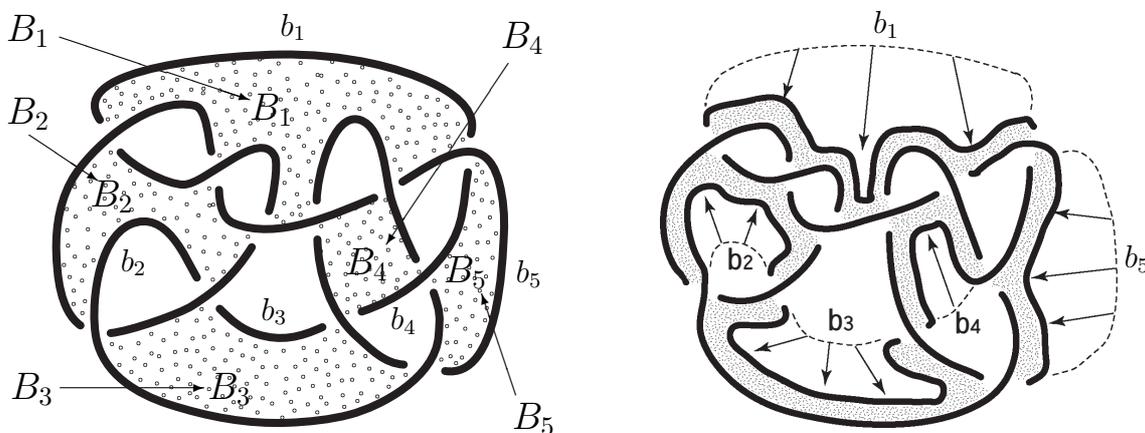


図 2: 樹下・寺阪結び目を例にとり，2重性並行表示への変形過程を示した図解

図 2 は，樹下・寺阪結び目を2重性並行表示に変形する手順を示した図解です．図 2 の

<sup>T)</sup> 本来ならば，絡み目表示定理の証明を記述しなければなりません，本論文では，これを割愛します．

(a) が樹下・寺阪結び目で，図 2 の (b) は，そのチェッカー彩色 [5, 11] です．図 2 の (c) は，チェッカー彩色を施したまま変形する手法を示した図形です．この (b) から (c) への変形が重要なので，少し詳しく説明します．



(a): チェッカー彩色された樹下・寺阪結び目に符号を付けた図形

(b): 帯状の図形に変形する過程を矢印で示した図

図 3: チェッカー彩色された樹下・寺阪結び目を帯状の図形に変形する方法の図解

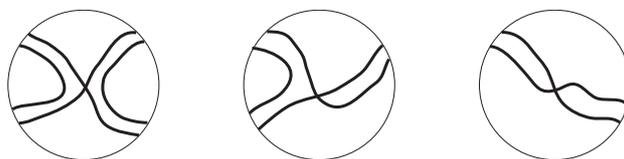
図 3 の (a) は，チェッカー彩色を施した樹下・寺阪結び目に符号を付けた図形です．チェッカー彩色を施した部分を黒色とします．この黒色部分を，図 3(a) に示す通り， $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$  とします．これらの黒色部分  $B_i (i = 1, 2, 3, 4, 5.)$  は，いずれも周囲を曲線で囲まれています．

一般的な正則表示で，任意の交差点から次ぎの交差点までの曲線を 1 次タングル [8] と呼ぶことにします．従って，各  $B_i$  は周囲を 1 次タングルで囲まれています．いま，各  $B_i$  の周囲の 1 次タングルの中からそれぞれ任意の一つずつの 1 次タングルを選び，これらを  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  とします．各  $b_i (i = 1, 2, 3, 4, 5.)$  を図 3(a) に示しました．

次に，各  $b_i$  を変形します．変形の方法は，各  $B_i$  の黒色部分の面積が小さくなる方向へ各  $b_i$  を移動し，各  $b_i$  を他の 1 次タングルに近づけ，黒色部分を帯状にします．

この変形では，1 次タングル同士が交わらないようにします．この変形の様子を図 3(b) に示しました．図 3(b) の矢印は，各  $b_i$  が変形される方向を示しています．

次に，帯状に変形された黒色部分のチェッカー彩色を消します．この状態を図 2(d) に示しました．図 2(d) の各交差点の近傍は，図 4 の (a), (b), (c) のいずれかの状態になります．これは，一般的な正則表示からの変形でも成り立ちます．図 4 では，上交差点と下交差点の区別をせず，



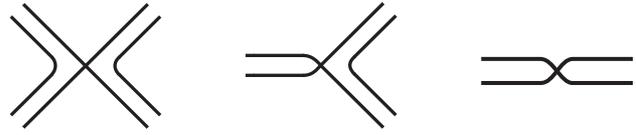
(a):X 型近傍 (b):Y 型近傍 (c):Z 型近傍

図 4: 絡み目の正則表示を帯状に変形したときに現れる各交差点の形状

図形に切り欠きを描いていません．これは説明を簡単にするためです．2重性並行表示の外形を得る変形では，交差点の上下の区別は必要がないからです．ただし，最終的な2重性並行表示では，交差点の上下の区別は必要ですから，各交差点の上下関係は記録しておく必要があります．

図4の3つの円は，いずれも近傍を表しています．この円は，絡み目とは関係がありません．図4の(a)をX型近傍，図4の(b)をY型近傍，図4の(c)をZ型近傍と呼ぶことにします．これらの各近傍には円は含まれません．次に，図4の(a), (b), (c)を変形してゆきます．まず，図4の(a), (b), (c)を直線化します．

図5の(a), (b), (c)は，それぞれX型，Y型，Z型の各近傍を直線化した図形です．まず，図5(a)のX型近傍を変形します．変形の結果を図6(b)に示しました．この変形では図6(a)の $x_1$ を図6(b)の $x'_1$ に変形します．同様に，図6(a)の $x_2$ を図6(b)の $x'_2$ に変形します．

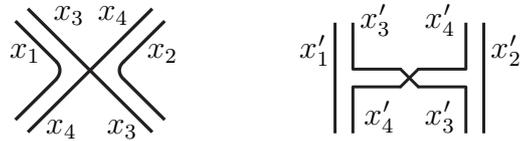


(a): X型近傍. (b): Y型近傍. (c): Z型近傍.

図5: X型近傍, Y型近傍, Z型近傍の各近傍を直線化した図形

次に，図6(a)の $x_3$ および $x_4$ についても変形します．図6(a)の $x_3$ を図6(b)の $x'_3$ に変形します．同様に，図6(a)の $x_4$ を図6(b)の $x'_4$ に変形します．

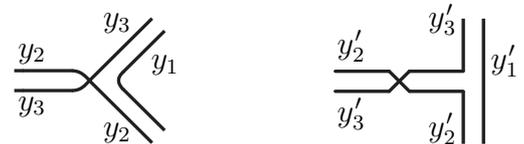
以上の変形操作によって，図5(a)のX型近傍は，図6(b)の図形へと変形されました．2重性並行表示で用いる図形は，この図6(b)です．



(a): X型近傍. (b): 変形後のX型近傍

図6: 変形されたX型近傍を示す図

次に，図5(b)のY型近傍を変形します．図7(b)に変形の結果を示しました．この変形は，図7(a)の $y_1$ を図7(b)の $y'_1$ に変形します．そして，図7(a)の $y_2$ を図7(b)の $y'_2$ に変形し，図7(a)の $y_3$ を図7(b)の $y'_3$ に変形します．これでY型近傍の変形は終了です．



(a): Y型近傍. (b): 変形後のY型近傍

図7: 変形されたY型近傍を示す図

以上の変形操作によって，図5(b)のY型近傍は，図7(b)の図形へと変形されました．2重性並行表示で用いる図形は，この図7(b)です．

次に，図5(c)のZ型近傍を変形します．図8(b)に，この変形の結果を示しました．この変形は，図8(a)の $z_1$ を図8(b)の $z'_1$ に変形します．そして，図8(a)の $z_2$ を図8(b)の $z'_2$ に変形します．これでZ型近傍の変形は終了です．

以上の変形操作によって、図 5(c) の Z 型近傍は、図 8(b) の図形へと変形されました。2 重性並行表示で用いる図形は、この図 8(b) です。

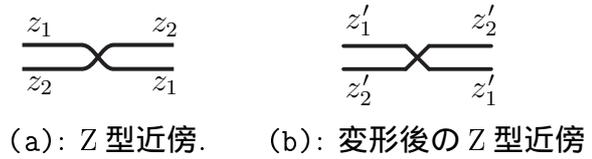


図 8: 変形された Z 型近傍を示す図

以上の変形の外に、交差点のない並行な曲線のみ部分の変形があります。並行な曲線とは、例えば、正則表示上で帯状に変形された図 9(a) のような 2 本の曲線です。このような並行な曲線には、いろいろな形がありますが、ここでは図 9(a) で代表しています。これらの並行な曲線は、すべて図 9(b) または図 9(c) へと変形します。

図 9(b) は、単なる平行線です。この平行線を  $\gamma$ -タングルと呼びます。図 9(c) は  $\gamma'$ -タングルと呼ぶことにします。



(a): 並行な曲線. (b):  $\gamma$ -タングル. (c):  $\gamma'$ -タングル.  
図 9: 正則表示上の並行曲線を変形する図形

図 2 の (d) から、2 重性並行表示を得る場合、図 10 の 5 つの図形から構成できます。つまり、

すべての絡み目の 2 重性並行表示は、図 10 の 5 つの図形を用いて構成できます。このことは、図 6(b), 図 7(b), 図 8(b), 図 9(b), 図 9(c) から得られる結果です。

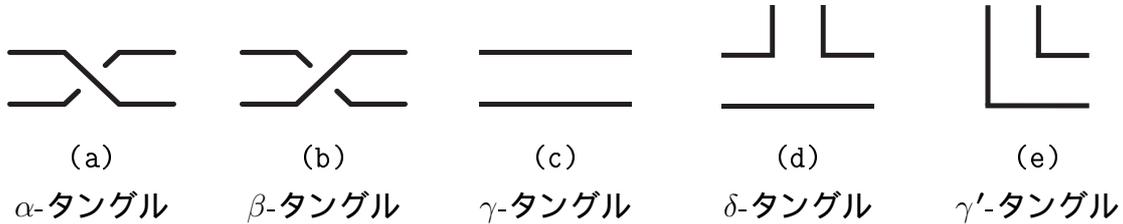


図 10: 絡み目の 2 重性並行表示を表現するための基本的な 5 つのタングル

これら 5 つの図形は、すべてタングル [1, 5, 6, 8] であると考えます。図 10 の (c) と (e) は、 $\gamma$ -タングルと  $\gamma'$ -タングルですから、図 10 の (a), (b), (d) をそれぞれ  $\alpha$ -タングル,  $\beta$ -タングル,  $\delta$ -タングルと呼びます。この中の  $\delta$ -タングルが、自明な 3 次タングルです。‘描画方法 A’ の記述に在るタングルです。

図 10 の 5 タングルを用いて、ある 2 重性並行表示の表現が得られたとき、その 2 重性並行表示を更に単純化して表現するために、5 タングルをグラフ化します。グラフ化した図形を図 11 に示します。

図 10 の (a), (b), (c), (d), (e) と、図 11 の (a), (b), (c), (d), (e) とは、それぞれ同じタングルを表す図形です。

以上の記述による方法を基にして、実際に作成した結び目の 2 重性並行表示を以下に図示します。図示する結び目は、 $3_1$  から  $8_{21}n$  とします。 $8_{21}n$  の  $n$  は、非交代 (non-



図 11: 絡み目の 2 重性並行表示を表現するための基本的な 5 つのタンゲルをグラフ化した図形

alternating) [11] を意味します．2 重性並行表示に変形する前の正則表示は，鈴木晋一著「結び目理論入門」 [11] の pp. 161–162 を用いました．

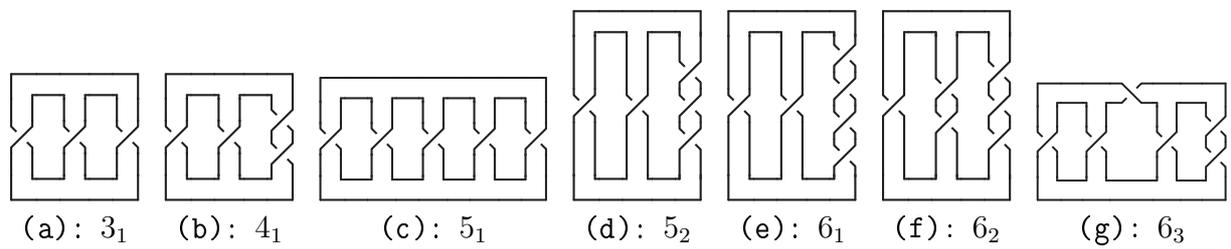


図 12: 結び目の 2 重性並行表示 (1)

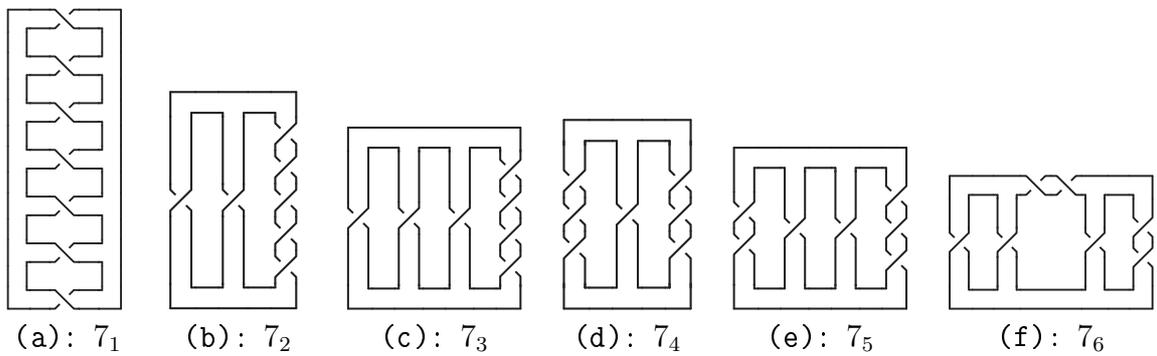


図 13: 結び目の 2 重性並行表示 (2)

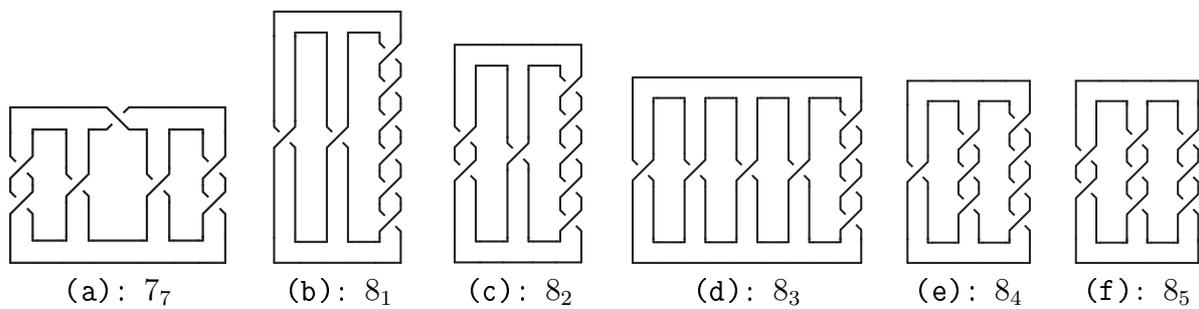


図 14: 結び目の 2 重性並行表示 (3)

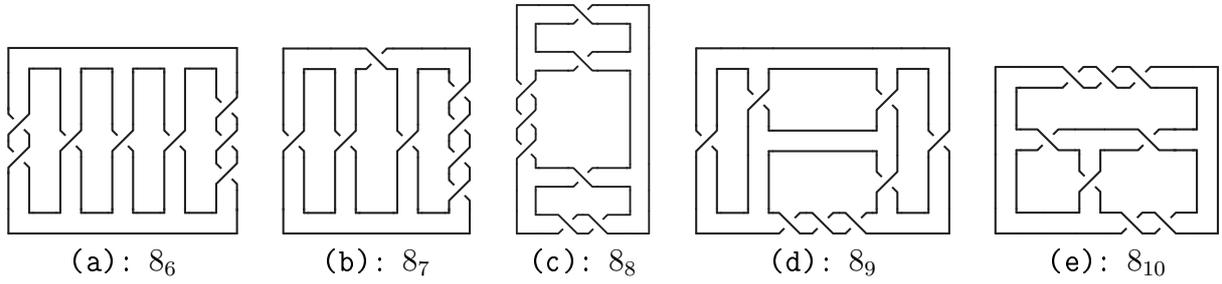


図 15: 結び目の 2 重性並行表示 (4)

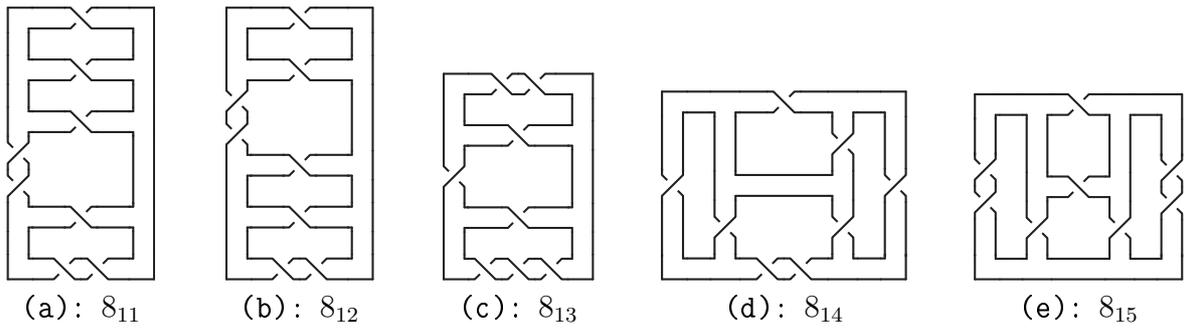


図 16: 結び目の 2 重性並行表示 (5)

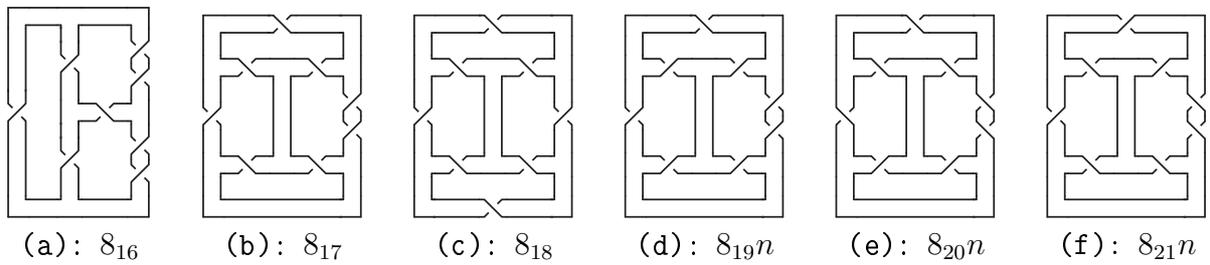


図 17: 結び目の 2 重性並行表示 (6)

図 12, 図 13, 図 14, 図 15, 図 16, 図 17 に示した図形は, すべて結び目の 2 重性並行表示です. 例えば, 図 12 の (a) は, 結び目  $3_1$  の 2 重性並行表示であり, 図 17 の (f) は, 結び目  $8_{21n}$  の 2 重性並行表示です.

次に, 図 11 を基本とし, 3-正則平面グラフを用いて表現した結び目の図形を示します. この図形を結び目のグラフ化表示と呼びます. 絡み目の場合は, 絡み目のグラフ化表示と呼びます.

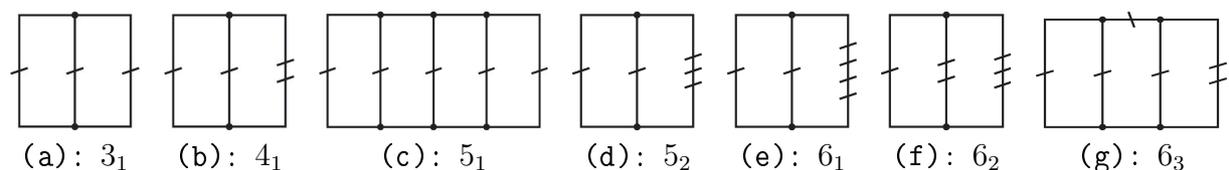


図 18: 結び目のグラフ化表示 (1)

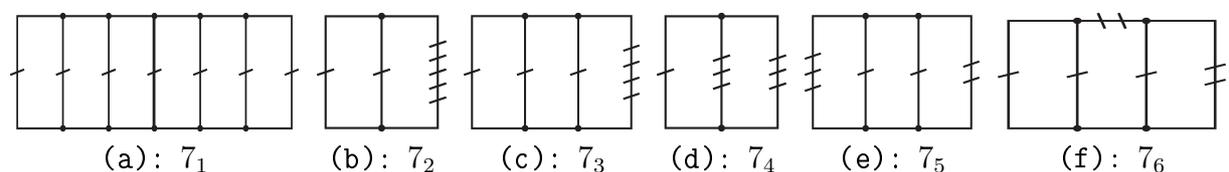


図 19: 結び目のグラフ化表示 (2)

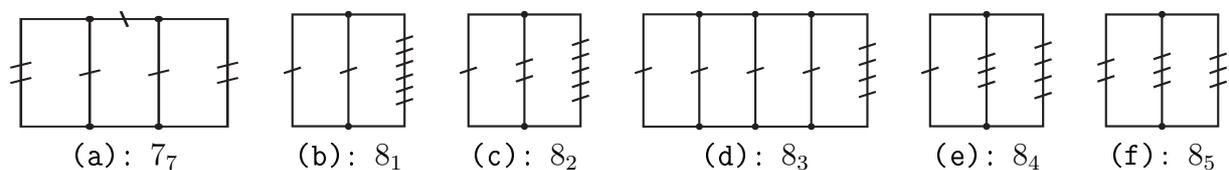


図 20: 結び目のグラフ化表示 (3)

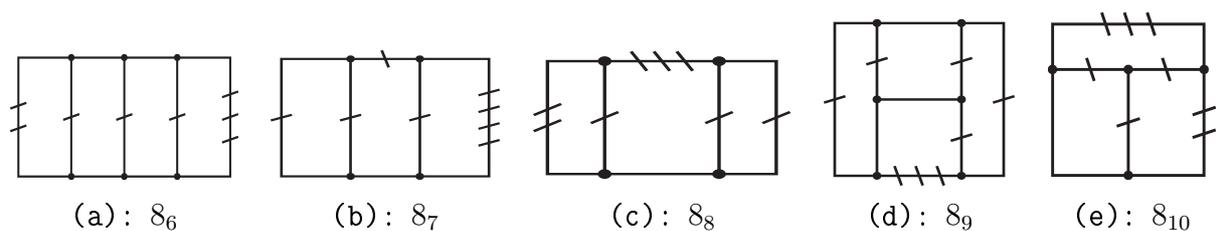


図 21: 結び目のグラフ化表示 (4)

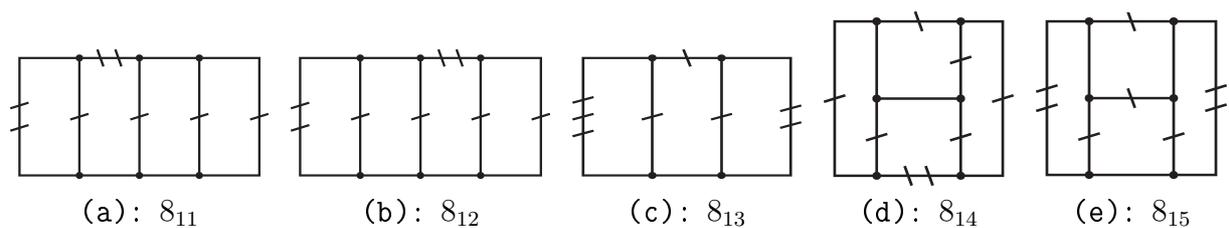


図 22: 結び目のグラフ化表示 (5)

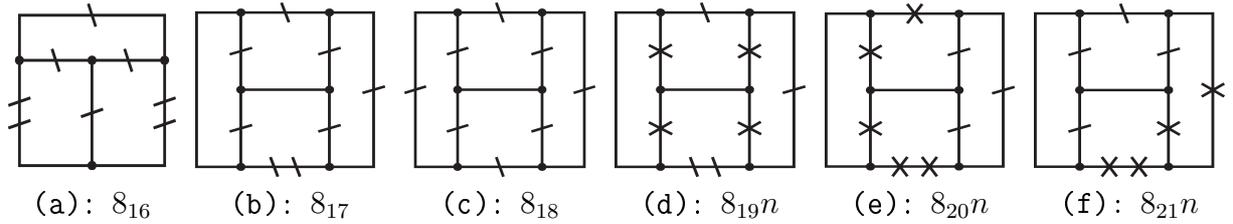


図 23: 結び目のグラフ化表示 (6)

例えば, 図 18 の (a) は結び目  $3_1$  のグラフ化表示であり, 図 23 の (f) は結び目  $8_{21n}$  のグラフ化表示です.

ここで, 絡み目のグラフ化表示に用いる 3-正則平面グラフを示します. 辺の数が 3 から 12 のグラフを図示します. ある絡み目の 2 重性並行表示やグラフ化表示を表現する場合, これらの 3-正則平面グラフが用いられることになります.

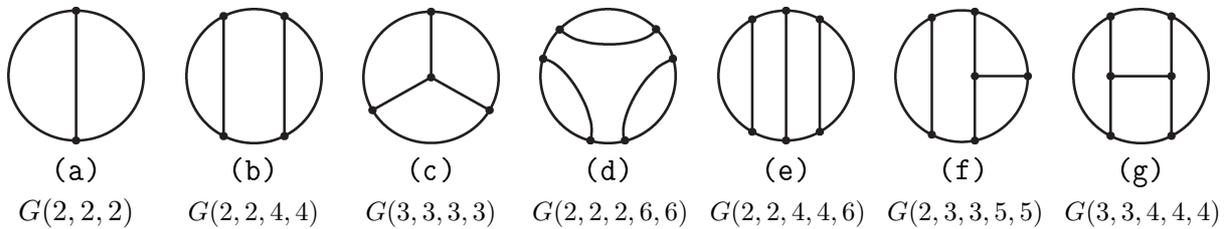


図 24: 3-正則平面グラフ (1)

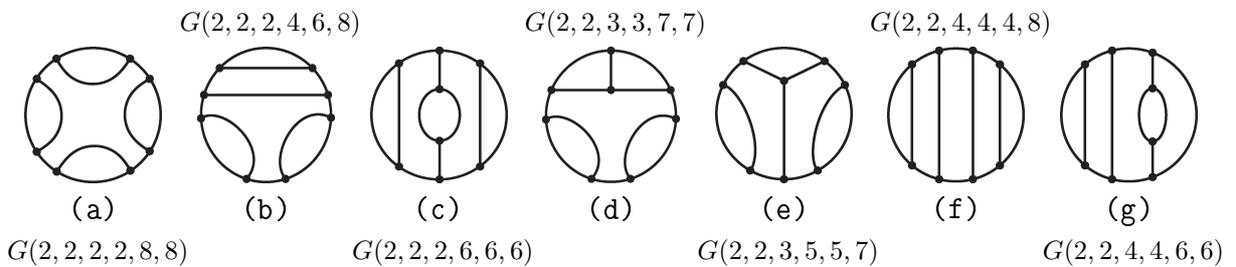


図 25: 3-正則平面グラフ (2)

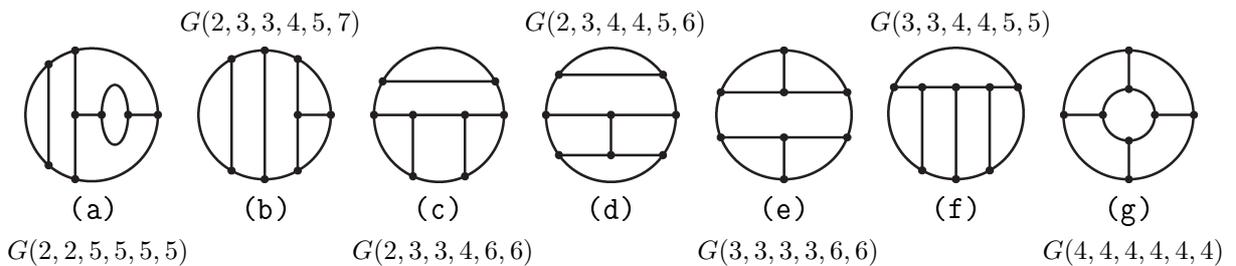


図 26: 3-正則平面グラフ (3)

図 24, 図 25, 図 26 において,  $G(2, 2, 2)$ ,  $G(2, 2, 4, 4)$  などは, 本論文だけで用いる 3-

正則平面グラフを示す記号です．パーレン括弧内の数値  $(2, 2, 2)$  や  $(2, 2, 4, 4)$  などは，3-正則平面グラフの各面を囲む辺の数です．

ここで，結び目のグラフ化表示を示した図 18，図 19，図 20，図 21，図 22，図 23 について，どの結び目が，どの 3-正則平面グラフに対応するのか，その一覧表を表 1 に示しておきます．

表 1: 結び目の 2 重性並行表示に対する 3-正則平面グラフの対応

	3-正則平面グラフ	結び目										
(i)	$G(2, 2, 2)$	$3_1$	$4_1$	$5_2$	$6_1$	$6_2$	$7_2$	$7_4$	$8_1$	$8_2$	$8_4$	$8_5$
(ii)	$G(2, 2, 4, 4)$	$6_3$	$7_3$	$7_5$	$7_6$	$7_7$	$8_7$	$8_8$	$8_{13}$	—		
(iii)	$G(3, 3, 3, 3)$	$8_{10}$	$8_{16}$	—								
(iv)	$G(2, 2, 4, 4, 6)$	$5_1$	$8_3$	$8_6$	$8_{11}$	$8_{12}$	—					
(v)	$G(3, 3, 4, 4, 4)$	$8_9$	$8_{14}$	$8_{15}$	$8_{17}$	$8_{18}$	$8_{19n}$	$8_{20n}$	$8_{21n}$	—		
(vi)	$G(2, 2, 4, 4, 4, 4, 10)$	$7_1$	—									

表 1 (vi) の  $G(2, 2, 4, 4, 4, 4, 10)$  は，グラフ化表示で結び目  $7_1$  を表現している図 19(a) から交差点を消し去れば得られる 3-正則平面グラフです．

絡み目のグラフ化表示で，交差点の数が大きくなると，グラフ化表示が，見にくく，描きにくくなります．その場合は， $\alpha$ -タングルと  $\beta$ -タングルのみ図 27 を用いて，他の  $\gamma$ -タングル， $\delta$ -タングル， $\gamma'$ -タングルは，図 11 を用いて表示します．

例えば図 28 です．この図 28 は，少なくとも， $p, q, r, s, t, u$  が奇数ならば結び目になります． $p = q = r = s = t = u = 1$  の場合は結び目  $8_{21n}$  です．図 28 の  $\alpha, \beta, \gamma$  は，それぞれ， $\alpha$ -タングル， $\beta$ -タングル， $\gamma$ -タングルを表しています．また， $2\beta$  は， $\beta$ -タングルを 2 つ繋ぎ合わせたタングルで，図形としては， になります．同様に， $p\alpha$  は  $\alpha$ -タングルを  $p$  個繋ぎ合わせたタングルであり， $u\beta$  は， $\beta$ -タングルを  $u$  個繋ぎ合わせたタングルです．他の  $q\alpha, r\alpha, s\alpha, t\beta$  も同様です．

以上述べてきたように，絡み目の正則表示は，3-正則平面グラフを導入することにより，規則的な見易い図形にすることができます．絡み目の正則表示を表現するために用いる 3-正則平面グラフは，橋 [3, 4, 10] のない 3-正則平面グラフを用います．なぜならば，橋のある 3-正則平面グラフで絡み目のグラフ化表示を表現した場合，橋は絡み目と絡み目の合成を意味



図 27: 交差点の数が多い場合に用いる図形

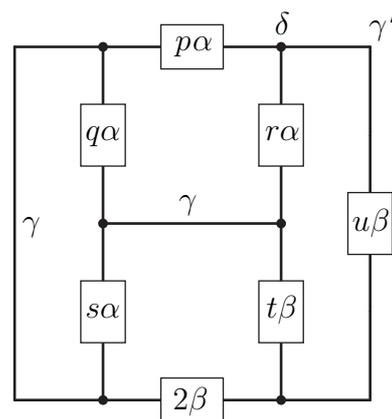


図 28: 交差点の数が多い場合のグラフ化表示方法の例

するからです．一般に，結び目の一覧表に用いられている正則表示は，合成 [1, 6, 11] されていない素な結び目 [1, 6, 11] のみが選ばれています．

3-正則平面グラフの頂点と辺は，その繋がり具合を行列で表示できますから，絡み目の正則表示も行列で表示できることとなります．なぜならば，絡み目の正則表示はグラフ化表示が可能だからです．

3-正則平面グラフを基礎とした絡み目の行列表示に関しては，記述が長くなりますので，次の機会に述べることにします．

## 参考文献

- [1] C. C. アダムス. 結び目の数学. 培風館, (東京), 1998.
- [2] R. H. Crowell, R. H. Fox, 寺阪英孝, 野口廣訳. 結び目理論入門. 岩波書店, (東京), 2000.
- [3] 浜田隆資, 秋山仁. グラフ論要説. 槇書店, (東京), 1987.
- [4] N. Hartsfield, G. Ringel, 鈴木晋一訳. グラフ理論入門. サイエンス社, (東京), 1992.
- [5] L. H. カウフマン, 鈴木晋一, 河内明夫監訳. 結び目の数学と物理. 培風館, (東京), 1995.
- [6] 河内明夫. 結び目理論. シュプリンガー・フェアラーク東京, (東京), 1990.
- [7] W. B. R. リコリッシュ. 結び目理論概説. シュプリンガー・フェアラーク東京, (東京), 2000.
- [8] 村杉邦男. 結び目理論とその応用. 日本評論社, (東京), 1993.
- [9] 日本数学会. 岩波 数学辞典 第3版. 岩波書店, (東京), 1985. pp. 1194–1195.
- [10] R. J. Wilson, 斎藤伸自, 西関隆夫共訳. グラフ理論入門. 近代科学社, (東京), 1992.
- [11] 鈴木晋一. 結び目理論入門. サイエンス社, (東京), 1991.

- 
- 「結び目と絡み目の正則表示に関する規則的な描画法」
  - 日本数学協会論文集（別冊 数学文化）pp.60–70
  - 2005年12月20日発行
  - 発行 日本数学協会

- 
- 長島 隆廣 (Takahiro NAGASHIMA, 日本数学協会, 正会員), 1937年 東京生まれ, 無職.
  - E-Mail: texnagashima@kuc.biglobe.ne.jp